PART4 余りによる分類

要点① 除法の原理

23 を 5 で割ると，商は 4 で余りは 3 である。このことを，等式を用いて表すと

$23=$

となる。この余り 3 は，割る数 5 よりも小さい数である。

整数の割り算について，次のことが成り立つ。

除法の原理

整数 a を，正の整数 b で割ったときの商を q，余りを r とすると

$a=bq+r$，$0\leqq r<b$

であり，これを満たす整数 q，r がただ 1 通りに定まる。

$r=0$ のとき，a は b で「割り切れる」

$r\neq 0$ のとき，a は b で「割り切れない」

という。

例　$36=7\cdot5+1$ より

36 を 7 で割ったときの商は ，余りは であり， $\leqq$ $<$ である。

$-60=8\cdot(\quad)+$ より

-60 を 8 で割ったときの商は ，余りは であり， $\leqq$ $<$ である。

要点② 余りによる整数の分類

整数を 2 で割ったときの余りは のいずれかである。

よって，すべての整数は，k を整数として $2k$，$2k+1$ の 通りの形に分類される。

$2k$ を偶数，$2k+1$ を奇数という。

整数を 3 で割ったときの余りは のいずれかである。

よって，すべての整数は，k を整数として $3k$，$3k+1$, $3k+2$ の 通りの形に分類される。

一般に，次のことがいえる。

すべての整数は，正の整数 m で割ったときの余り 0，1，……，$m-1$ によって

$$mk,\ mk+1,\ mk+2,\ \cdots\cdots,\ mk+(m-1)\ (k \text{ は整数})$$

のいずれかの形で表される。

例 2 つの整数 a，b を 7 で割った余りがそれぞれ 1，4 であるとき，a，b は整数 k，l を用いて

$a=\qquad,\ b=$

と表される。

このとき，$a+b$，ab をそれぞれ 7 で割った余りを求める。

$a+b=(7k+\ \ )+(7l+\ \ )$

$=\ \ k+\ \ l+\ \ +$

$=\ \ (k+l)+(\qquad)$

$=\ \ (k+l)+$

よって，$a+b$ を 7 で割ったときの余りは

$ab=(7k+\ \ )(7l+\ \ )$

$=\ \ kl+\ \ \cdot 4k+\ \ \cdot l+$

$=\ (7kl+4k+l)+$

$=\ (7kl+4k+l)+$

よって，ab を 7 で割ったときの余りは

4 2つの整数a, bを5で割ったときの余りをそれぞれ2, 3とする。このとき, 次の数を5で割ったときの余りを求めよ。

(1)　$a+b$　　　　(2)　ab

Point Pickup

除法の原理

整数aを，正の整数bで割ったときの商をq，余りをrとすると

$$a=bq+r,\quad 0\leqq r<b$$

を満たす整数q，rがただ1通りに定まる。

余りによる整数の分類

kを整数とするとき，すべての整数は

2で割ったときの余りで$2k$，$2k+1$の2通りに

3で割ったときの余りで$3k$，$3k+1$，$3k+2$の3通りに

正の整数mで割ったときの余りでmk，$mk+1$，$mk+2$，……，$mk+(m-1)$のm通りに

それぞれ分類することができる。

第10講 PART4 確認問題

2 つの整数 a, b を 8 で割ったときの余りをそれぞれ 2, 5 とする。

1 $a+b$ を 8 で割ったときの余りは [ア] である。

2 ab を 8 で割ったときの余りは [イ] である。

PART4 余りによる分類

4 2つの整数 a, b を5で割ったときの余りをそれぞれ2, 3とする。このとき, 次の数を5で割ったときの余りを求めよ。

(1) $a+b$　　　(2) ab

[解答]

整数 a，b は，整数 k，l を用いて次のように表すことができる。

$a=5k+2$，$b=5l+3$

(1) $a+b=(5k+2)+(5l+3)=5k+5l+2+3=5(k+l)+(2+3)=5(k+l)+5$

$=5(k+l)+5\cdot1=5(k+l+1)$

よって，$a+b$ を5で割ったときの余りは0

(2) $ab=(5k+2)(5l+3)=5^2kl+5\cdot3k+5\cdot2l+2\cdot3=5(5kl+3k+2l)+2\cdot3$

$=5(5kl+3k+2l)+6=5(5kl+3k+2l)+5\cdot1+1=5(5kl+3k+2l+1)+1$

よって，ab を5で割ったときの余りは1

第10講　PART4 確認問題 解答

1

[正解] ア：7

[解説]

整数 a, b は整数 k, l を用いて次のように表すことができる。

$a=8k+2$, $b=8l+5$ [A]

$a+b=(8k+2)+(8l+5)$

$=8k+8l+7$

$=8(k+l)+7$ [B]

よって，$a+b$ を 8 で割ったときの余りは，

7

[A]　除法の原理
整数 a を，正の整数 b で割ったときの商を q，余りを r とすると，
$a=bq+r$ $(0\leqq r<b)$
であり，これを満たす q，r がただ 1 通りに定まる。

[B]　$a+b$ を，
$8\times$(整数)$+r$ $(0\leqq r<8)$
の形に変形する。

2

[正解] イ：2

[解説]

整数 a, b は整数 k, l を用いて次のように表すことができる。

$a=8k+2$, $b=8l+5$

$ab=(8k+2)(8l+5)$

$=64kl+40k+16l+10$

$=8(8kl+5k+2l)+8\cdot1+2$

$=8(8kl+5k+2l+1)+2$ [C]

よって，ab を 8 で割ったときの余りは，

2

[C]　ab を，
$8\times$(整数)$+r$ $(0\leqq r<8)$
の形に変形する。